Wahrscheinlichkeitstheorie
Prof. Dr. Barbara Rüdiger
WS 2014/15

Klausur 19.02.2015

Übung I:
Sei $c_n = \frac{1}{n^3}$, $n \in N$. Finden Sie eine Konstante c und eine Folge $\{x_n\}$ von unterschiedlichen reellen Zahlen, für die gilt:

a) $\mu := c \sum_n c_n \delta_{x_n}$ ist eine Verteilung mit Erwartungswert Null, und

b) der zweite Moment von μ ist unendlich.

Übung II:

a) Geben Sie eine Verteilung mit negativem Erwartungswert und ohne Dichte an. Beweisen Sie, dass diese keine Dichte hat

b) Sei X eine Zufallsvariabel mit dieser Verteilung. Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $aX^2 - b$, für a, b reelle Zahlen.

Übung III:

a) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Binomialverteilung $B(p, n)$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $B(p, n)$ durch Argumentationen welche stochastische Unabhängigkeitseigenschaften benutzen.

Übung IV:
Beweisen Sie, dass für eine Zufallsvariabel X mit endlichem zweiten Moment auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gilt

$$P(|X - E[X]| > \epsilon) \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$$

Übung V:
Sei $\mathbf{S} = \{]a, b[: a \leq b\}$ und $S = \{[a, b[: a \leq b\}$. Beweisen Sie , dass $\sigma(\mathbf{S}) = \sigma(S)$.

Übung VI:

Sei μ_U die uniforme Verteilung auf [0,1]. Sei $X_n = n 1_{[0, \frac{1}{n^2}]}$, für $n \in N$.

a) Erklären Sie für welche p, mit $1 \leq p < \infty$, X_n in $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu_U)$ konvergiert.

b) Erklären Sie ob X_n in Verteilung konvergiert, und geben Sie gegeben falls die Grenzverteilung an.

Bemerkungen:
Resultate ohne Berechnungen oder Begründung werden nicht anerkannt.
Hilfsmittel jeder Art sind untersagt.
Jede Übung kann mit bis zu 4 Punkten bewertet werden. Gesamtpunktzahl ist dann mit 24 Punkten erreicht.